JAGUAR
NÚCLEO OLÍMPICO DO AMAPÁ

# GABARITO DA 2ª FASE DA 1ª OMM 2026

**QUESTÃO 1**

A)O ponto P é equidistante dos pontos A, B e C, logo, ele é o centro da circunferência circunscrita, cujo raio é 15. Em um triângulo equilátero, a relação entre o raio da circunferência circunscrita (R) e o lado (l) é:

$$R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo R por 15:

$$15 = \frac{l\sqrt{3}}{3} \rightarrow 45 = l\sqrt{3} \rightarrow \frac{45}{\sqrt{3}} = l = \frac{45\sqrt{3}}{3} = 15\sqrt{3}$$

B)A fórmula da área de um triângulo equilátero é:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Substituindo l por $15\sqrt{3}$:

$$A = \frac{\left(15\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{225\times 3\sqrt{3}}{4} = \frac{675\sqrt{3}}{4}$$

C)Podemos chamar o ponto médio de BC de ponto M. A distância do ponto M até o centro da circunferência é o apótema do triângulo equilátero, que é a metade do raio R. Logo: $\frac{15}{2} = 7,5$

**QUESTÃO 2**

A) Primeiro, calculamos o número total de partidas disputadas no torneio. Como são 4 times e cada um enfrenta todos os outros uma única vez, o número de jogos é dado pela combinação dos 4 times de 2 em 2:
Total de Jogos = (4×3)/ 2 = 6 jogos
Em cada jogo, obrigatoriamente um time vence (não há empates). Portanto, a soma total das vitórias de todos os times deve ser igual ao número total de jogos, ou seja, 6 vitórias. Se fosse possível que todos os 4 times terminassem com o mesmo número de vitórias, teríamos a equação:
$4\times v = 6 \rightarrow v = 1,5$
Como o número de vitórias em um campeonato deve ser obrigatoriamente um número inteiro, concluímos que é impossível que todos os times terminem com a mesma quantidade de vitórias.

B) O Ypiranga joga contra os outros 3 times. Para ganhar todas as partidas, ele deve vencer exatamente 3 jogos. De acordo com o enunciado, em cada partida a probabilidade de um time ganhar é de 1/2 (50%). Como os resultados de cada partida são eventos independentes, a probabilidade de o Ypiranga vencer os seus três jogos é o produto das probabilidades de cada vitória individual:
P(vencer todos) = (1/2) × (1/2) × (1/2) = (1/2)3 = ⅛.

C) Para que 3 times terminem empatados em primeiro lugar, eles devem possuir o mesmo número de vitórias, e esse número deve ser maior que o do quarto time. Como a soma total de vitórias é 6, a única distribuição possível para esse cenário é que três times tenham 2 vitórias cada e o quarto time tenha 0 vitórias. Para que isso ocorra, devemos escolher qual dos 4 times perderá todas as suas 3 partidas. Há 4 formas de escolher esse time. Uma vez escolhido o time com 0 vitórias, os outros 3 times devem ter vencido o último e, entre si, devem ter formado uma cadeia de vitórias (A vence B, B vence C, C vence A) para que cada um tenha exatamente 1 vitória sobre os outros dois. Existem $2^3 = 8$ resultados possíveis para os jogos entre os 3 times de cima. Apenas 2 desses resultados formam um ciclo. O número total de resultados possíveis para o campeonato (6 jogos) é $2^6 = 64$. A probabilidade é o número de casos favoráveis dividido pelo total:

$P = (4 \times 2) / 64 = 8/64 = 1/8$.

**QUESTÃO 3**

A) Na primeira dobra, Roberto cria um triângulo isósceles de catetos de 7 cm (área listrada), repetindo o mesmo passo com o vértice oposto. Com isso, a terceira figura é formada por 4 lados 3 cm, e dois sendo a hipotenusa h do triângulo isósceles de 7 cm, que podemos calcular utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$7^2 + 7^2 = h^2 = 49 + 49 = 98 \rightarrow h = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

No último passo, Roberto dobra a terceira figura, senda a quarta formada por 2 lados 3 cm, 2 lados resultados da metade dos lados de $7\sqrt{2}$ cm e um lado que é a hipotenusa de um triângulo isósceles de catetos de 3 cm, que também pode ser calculado com Teorema de Pitágoras:

$$3^2 + 3^2 = i^2 = 9 + 9 = 18 \rightarrow i = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Logo, o perímetro da figura formada pela última dobra é:

$$3 + 3 + 3,5\sqrt{2} + 3,5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6 + 10\sqrt{2}$$

B) A área da figura formada pela segunda dobra pode ser calculada como a diferença do quadrado inicial de lado 10 cm e dos dois triângulos isósceles de catetos de 7 cm resultantes das duas dobras.

Logo: $10^2 - 2\times\left(\frac{7\times 7}{2}\right) = 100 - 49 = 51$

C) A área pintada na terceira imagem pode ser calculada como a diferença da área total da figura e os dois quadrados de lado 3 cm, ou seja:

$$51 - 3^2 - 3^2 = 51 - 9 - 9 = 51 - 18 = 33$$



**QUESTÃO 4**

A) Como são eventos independentes, a probabilidade dos cientistas receberem essa sequência é a multiplicação das probabilidades de cada evento, ou seja, $(\frac{3}{4})^3 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{27}{1024}$.

B) Enfileirando as pessoas que responderão em ordem, temos que 7 delas responderão “sim”, e o restante “não”. Dessa forma, é como se, de 10 pessoas, estivéssemos escolhendo 7. Portanto, utilizando a fórmula da combinação ou da permutação com repetição, existem $C_{n,k} = P_{n,k} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$ sequências diferentes possíveis.

Uma forma de pensar sem as fórmulas é semelhante. Basta supor que já temos 10 pessoas, com 7 “sims” e 3 “nãos”; e queremos ordená-las de acordo com quando cada uma vai responder. Assim, a primeira pessoa pode ser uma das 10, a segunda uma das 9 restantes, e assim por diante, obtendo 10!. No entanto, existem sequências repetidas. Para retirá-las, basta dividir este valor por quantas permutações de "sims" (7!) e "nãos" (3!) temos. No final, obtemos $\frac{10!}{7!3!} = 120$ sequências.

C) Agora, basta aplicar a lógica de a) e b).
Primeiro, podemos calcular a probabilidade de cada sequência de 51 respostas "sim" ocorrer. Isso seria:

$$(43\%)^{51} \cdot (1 - 43\%)^{100 - 51} = (\frac{43}{100})^{51} \cdot (\frac{57}{100})^{49}.$$

Depois, basta calcular quantas dessas sequências existem, pois a probabilidade de todas vão se somar. Na mesma lógica, temos que essa quantidade seria $\frac{100!}{51!49!}$.

A probabilidade, portanto, é de $\frac{100!}{51!49!} \cdot (\frac{43}{100})^{51} \cdot (\frac{57}{100})^{49}$.

## QUESTÃO 5

A) Não é possível garantir que todas as cidades estejam conectadas com 7 estradas por cidade. Podemos dividir as 16 cidades em dois grupos de 8 e conectar completamente as cidades dentro de cada grupo. Assim, cada cidade terá 7 conexões, mas não haverá ligação entre os grupos, tornando o sistema desconexo.

B) O número mínimo de estradas por cidade é **8**. Para que um grafo seja necessariamente conexo, deve-se evitar a divisão em duas componentes. Isso exige que:

$n < 2(k + 1)$

Para $n = 16$:

$16 < 2(k + 1)$
$16 < 2k + 2$
$14 < 2k$
$k > 7 \rightarrow k \geq 8$

C) O número mínimo de estradas por cidade, em função de n cidades, é: $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Para evitar que o grafo seja desconexo, deve-se garantir:

$n < 2(m + 1)$

$m > (n - 2)/2$
Logo, o menor inteiro que satisfaz isso é:

$m = \lfloor n/2 \rfloor$ (piso)

## QUESTÃO 6

A) Utilizando o passo-a-passo descrito, temos:
- 3.890 - 12 = 3.878;
- 387 - 16 = 371;
- 37 - 2 = 35.

Como 35 é múltiplo de 7, temos que SIM, 38.906 é múltiplo de 7.

B) Note que, se $\overline{AB}$ é múltiplo de 7, então ele pode ser escrito como $7 \cdot k$, para algum inteiro $k$. Ao multiplicar por 2, temos $\overline{AB} = 2 \cdot (7k) = 7 \cdot (2k)$. Logo, $2 \cdot \overline{AB}$ é múltiplo de 7.

C) Subtraindo, temo $20A + 2B - 21A = 2B - A$.

Como provado anteriormente no item b), $2 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot (10A + B) = 20A + 2B$ é múltiplo de 7. Logo, podemos escrever $20A + 2B$ como $7k_1$, para algum inteiro $k_1$. Dessa forma, temos que $20A + B - 21A = 7k_1 - 21A = 7 \cdot (k_1 - 3A)$. Logo, $2B - 1$ é múltiplo de 7.

Essa conta está relacionada com o método da Luana, porque o resultado dessa subtração é o inverso aditivo da conta final de Luana para um $\overline{AB}$, ou seja, $2B - A = \ - (A - 2B)$.

D) Para $n = 1$, temos que $2 \cdot \overline{A_1A_0} = A_1 \cdot 20 + A_0 \cdot 2 = 21A_1 - (A_1 - 2A_0)$. Note, no entanto, que, pelo item b), se $\overline{A_1A_0}$ é múltiplo de 7, então $2 \cdot \overline{A_1A_0}$ também é. Ao mesmo tempo, pelo item c), $2A_0 - A_1$ é múltiplo de 7 também, o que mostra que o método da Luana funciona para $n = 1$.

Agora, pela hipótese indutiva, suponha que esse método funciona para $n$. Vamos verificar para $n + 1$. Note que para um número múltiplo de 7 de $n + 1$ algarismos $\overline{A_{n+1} \cdots A_1A_0} = A_0 + \overline{A_{n+1} \cdots A_1} \cdot 10$. Logo, temos que $2 \cdot \overline{A_{n+1} \cdots A_1A_0} = 2A_0 + 20 \cdot \overline{A_{n+1} \cdots A_1} = 21 \cdot \overline{A_{n+1} \cdots A_1} - (\overline{A_{n+1} \cdots A_1} - 2A_0)$, e, portanto, que, como $2 \cdot \overline{A_{n+1} \cdots A_1A_0}$ e $21 \cdot \overline{A_{n+1} \cdots A_1}$ são múltiplos de 7, então $\overline{A_{n+1} \cdots A_1} - 2A_0$ também é. No entanto, note que este número tem no máximo $n + 1 - 1 = n$ algarismos. Como o método funciona para $n$, então o método também funciona para $n + 1$.

Assim, por indução, temos que o método da Luana sempre funciona para um número de $n$ de algarismos qualquer.